Higher order estimate near the boundary of a large solution to semilinear Poisson equation

広島大学　先進理工系科学研究科　数学プログラム
張　彧瀟 (ZHANG YUXIAO) *

概要

本稿では、滑らかな境界 $D \subset \mathbb{R}^n$ 上で非線形ポアソン方程式 $\Delta u = f(u)$ の large solution の境界付近における漸近挙動に関する問題を考察する。二種類の典型的な非線形項に対し、特定の条件のもとで、large solution の境界 ∂D 付近における漸近挙動における第三項、さらには高次項までを与える。

1　導入

完全導体容器内で均一に帯電した理想気体の平衡を考える。平衡は、気体内の電気力が圧力とちょうど釣り合うときに発生する。どのような容器でも、気体の総質量ごとに、容器内のその気体の質量の平衡分布が 1 つだけ存在することがわかる。平衡状態では、密度と圧力は容器表面で最大値に達し、この表面では両方とも定数である。さらに、気体の総質量が増加するにつれて、密度と圧力は各点で増加する。ただし、Keller の研究 [1] により、容器内の密度と圧力は、気体の総質量のように無

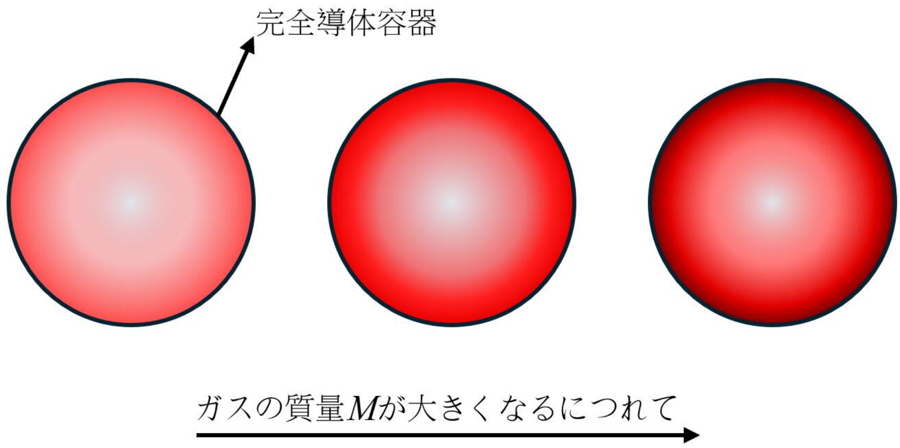

図 1　完全導体容器の変化

制限に増加するわけではない。代わりに、気体の総質量が無限になるにつれて、内部の各点で密度と圧力の両方が有限の上限に近づく。総質量が大きい場合、気体の大部分は表面近くの薄層に蓄積す

* E-mail:d233553@hiroshima-u.ac.jp

る。容器内により多くの気体を入れても、内部の点で密度と圧力を限りなく大きくすることができない。

この問題を数学モデルに表す。

圧力を p、質量密度を ρ、電荷密度を $a\rho$、および電場ベクトルを E とする。このとき、平衡の条件は

$$\nabla p = a\rho E$$

である。定数 a は、電荷密度と質量密度の比である。気体が均一に帯電したと仮定しているため、a は定数である。電荷が場の発生源であるという事実は、次の方程式で表される。

$$\nabla \cdot E = 4\pi a\rho.$$

ここで、

$$v = \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho\,(p)}$$

で定義すると、

$$\Delta v = f\,(v) \tag{$*$}$$

が成り立つ。ただし、$f\,(v) = 4\pi a^2 \rho\,(p\,(v))$ である。

ここで、理想気体の場合を考えると、圧力 p と質量密度 ρ は以下の式を満たす。

$$p = \frac{RT}{m}\rho.$$

ただし、定数 T は温度であり、R は気体定数であり、m は気体中の分子の平均質量である。$p_0 = 1$ のとき、

$$v = \frac{RT}{m}\log p$$

が成り立つ。したがって、

$$u = \frac{m}{RT}v + \log 4\pi\left(\frac{am}{RT}\right)^2$$

とすると、

$$\Delta u = e^u \tag{$**$}$$

になる。総質量 M が無限大になるとき、圧力は内部の点で有限な上限を持つが、境界で無限大になることがわかる。

本稿では、

$$\Delta u = f\,(u) \tag{1}$$

のような方程式をポアソン方程式と呼ぶ。また、当該方程式の解が以下の条件 (2) を満たす場合、その解は large solution と呼ばれる。

$$u\,(x) \to \infty \quad \text{as } \delta\,(x) \to 0 \tag{2}$$

ただし、$\delta\,(x) = \mathrm{dist}\,(x, \partial D)$ は D 内の点 x と境界 ∂D の距離となる関数である。

したがって、前述の物理現象において、$(**)$ 式の u は large solution となる。

(1) 式において、非線形項 $f(t)$ には冪関数 t^p と指数関数 e^t という二つの典型的な例が存在する。ここで、e^t の場合は既に前述で紹介した ([1] を参照)。一方、t^p の場合は幾何学および数学の他の分野で現れている ([2,3] を参照)。

本研究では、冪関数型および指数関数型の非線形項に対し、特定の条件のもとで、その large solution が境界付近における漸近挙動の第三項やより高次の項を与える。言い換えれば、large solution の漸近形を与える。

2 既知の結果

この節では、半線形ポアソン方程式 (1) の large solution の境界付近における漸近挙動について、先行研究における既知の結果 [4,5,6,7] を述べる。

$D \subset \mathbb{R}^n,\ n \geq 2$ を滑らかで有界な領域とする。

定理 2.1 (J.B.Keller [4], R.Osserman [5], 1957, large solution の存在). 半線形ポアソン方程式 (1) の large solution u が存在するための必要十分条件は

$$\Psi(t) = \int_t^\infty \frac{1}{\sqrt{2F(s)}} ds < \infty \quad \text{for } \forall t > 0. \tag{3}$$

ただし、$F'(s) = f(s)$ である。このとき、すべての large solution u は

$$\lim_{\delta(x) \to 0} \frac{u(x)}{\Phi(\delta(x))} = 1 \tag{4}$$

を満たす。ただし、Φ は Ψ の逆関数である。

この定理により、境界付近における large solution は以下の展開式で表すことができる。

$$u(x) = \Phi(\delta(x)) + o(1)\Phi(\delta(x)) \quad \text{as } \delta(x) \to 0. \tag{5}$$

すなわち、境界付近における large solution の漸近挙動の主要項は $\Phi(\delta(x))$ である。

例として、$f(t) = t^p$ の場合、$\Phi(\delta(x)) = \left(\frac{2(p+1)}{(p-1)^2}\right)^{\frac{1}{p-1}} (\delta(x))^{-\frac{2}{p-1}}$ であり、$f(t) = e^t$ の場合、$\Phi(\delta(x)) = \log \frac{2}{(\delta(x))^2}$ である。

ならば、第二項はどうなるか？この問題について、以下の定理が成り立つ。

定理 2.2 (C. Anedda, G. Porru [6], 2007). $p > 1$ および $\beta > 0$ を定数、$f(t)$ を $[0, \infty)$ で定義された滑らかな関数とし、以下の仮定 (a1)-(a4) を満たすとする。

(a1) $f(0) = 0,\ f'(t) > 0\ \ (t \in (0, \infty))$.

(a2)

$$\frac{f'(t)F(t)}{(f(t))^2} = \frac{p}{p+1} + O(1)t^{-\beta} \quad (t \to \infty).$$

(a3) $M > 0$ が存在して、任意の $\theta \in (1/2, 2)$ と大きい $t > 0$ に対して、

$$\frac{|f''(\theta t)|\, t^2}{f(t)} \leq M$$

が成り立つ。

(a4) $1 < p \leq 3$ のとき、$\theta_0 \in (0,1)$, $t_0 > 1$ が存在して、任意の $\theta \in (\theta_0, 1)$, $t > t_0$ に対して、$\theta f(t) > f(\theta t)$ が成り立つ。

このとき、(1) のすべての large solution は

$$u(x) = \Phi(\delta(x)) \left[1 + \frac{(n-1)\, H(x)}{p+3} \delta(x) + O(1)\, \delta^{\sigma}(x) \right] \quad (\delta(x) \to 0) \tag{6}$$

を満たす。$\sigma \in (1,2]$ は、$\sigma < \min\{2\beta/(p-1)+1, 2/(p-1)+1\}$ を満たす定数である。ここで、任意の $x \in D$ に対して、$H(x)$ は x における曲面 $\{y \in D \,|\, \delta(y) = \delta(x)\}$ の平均曲率である。

この定理は、二重冪関数型の非線形項 (例えば $f(t) = t^p + \alpha t^q \ \ (\alpha \in \mathbb{R}, -1 < q < p)$) の場合において、その large solution の境界付近における漸近挙動の第二項が $\frac{(n-1)H(x)}{p+3} \Phi(\delta(x))\, \delta(x)$ で与えられることを示す。

定理 2.3 (C. Anedda, G. Porru [7], 2008). $f(t)$ が以下の仮定 (b1)-(b4) を満たすとする。

(b1) $f(t) \geq 0, F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(s)\, ds < \infty$ であり、十分大きい t に対して、$f'(t) > 0$ が成り立つ。

(b2)

$$\frac{F(t)\, f'(t)}{f^2(t)} = 1 + O(1)\, \frac{1}{t} \quad (t \to \infty).$$

(b3) $C > 0$ が存在して、

$$\frac{F(t)}{f(t)} = C + O(1)\, \frac{1}{t} \quad (t \to \infty).$$

(b4) $\exists m > 2, \varepsilon > 0, L > 0, t_0 > 0$ s.t. $\forall t > t_0$

$$\frac{|f''(t+\sigma)|}{f(t)} \leq L (F(t))^{\frac{1}{m}} \quad (-\varepsilon < \sigma < \varepsilon).$$

このとき、(1) のすべての large solution は

$$u(x) = \Phi(\delta(x)) + (n-1)\, H(x)\, C \delta(x) + O(1)\, (\Phi(\delta(x)))^{-1} \delta(x) \quad (\delta(x) \to 0) \tag{7}$$

を満たす。

この定理は、指数関数型の非線形項 (例えば $f(t) = e^{\frac{1}{C}t} P(t)$、$P(t)$ が正の多項式関数である) の場合において、その large solution の境界付近における漸近挙動の第二項が $(n-1)\, H(x)\, C\delta(x)$ で与えられることを示す。

本研究では、既知の二つの定理を拡張し、より厳密な条件のもとで、上記二種類の非線形項に対する境界付近における large solution の漸近挙動の第三項を解析する。特に、$f(t) = t^p + \alpha t^q \ \ (\alpha \in \mathbb{R}, -1 < q < p)$ の場合には、漸近挙動の高次項を与え、$f(t) = e^t$ の場合には、漸近挙動の第三項は一般の指数関数型非線形項の第三項とは異なるものとなることを示す。

3 主結果

$D \subset \mathbb{R}^n,\ n \geq 2$ を滑らかで有界な領域とする。

定理 3.1 (K. Takimoto, Y. Zhang [8], 2023). $p > 1,\ q \in ((p+1)/2, p),\ \widetilde{q} \in (-1, q)$ を定数とし、$\varphi(t)$ は $[0, \infty)$ で定義された滑らかな関数とする。$f(t) = t^p + \varphi(t)$ とし、以下の仮定 (A1), (A2), (A3), (A4) を満たすとする。

(A1) $f(0) = 0,\ f'(t) > 0\ \ (t \in (0, \infty))$.

(A2) 定数 $\alpha \in \mathbb{R}$ が存在して、$\varphi(t) = \alpha t^q + O(1)\, t^{\widetilde{q}},\ \varphi'(t) = \alpha q t^{q-1} + O(1)\, t^{\widetilde{q}-1}\ \ (t \to \infty)$ が成立する。

(A3) $M > 0$ が存在して、任意の $\theta \in (1/2, 2)$ と大きい $t > 0$ に対して、

$$\frac{|f''(\theta t)|\, t^2}{f(t)} \leq M$$

が成り立つ。

(A4) $1 < p \leq 3$ のとき、$\theta_0 \in (0, 1),\ t_0 > 1$ が存在して、任意の $\theta \in (\theta_0, 1),\ t > t_0$ に対して、$\theta f(t) > f(\theta t)$ が成り立つ。

このとき、(1) のすべての large solution は

$$u(x) = \Phi(\delta(x)) \left[1 + A_1(x)\, \delta(x) + A_\gamma(x)\, \delta^\gamma(x) + O(1)\, \delta^{\mu_1}(x)\right] \quad (\delta(x) \to 0) \tag{8}$$

を満たす。ただし、$\mu_1 = \min\{4(p-q)/(p-1) + 1, 2(p-\widetilde{q})/(p-1) + 1, 2\}$, $\gamma = 2(p-q)/(p-1) + 1,\ A_1(x) = (n-1)\, H(x)/(p+3)$ であり、$A_\gamma(x)$ は $n,\ p,\ q,\ \alpha,\ H(x)$ に依存する関数である。

この定理は、$f(t) = t^p + \alpha t^q$ のような非線形項の場合において、その large solution の境界付近における漸近挙動の第三項が $A_\gamma(x)\, \delta^\gamma(x)\, \Phi(\delta(x))$ で与えられることを示す。q が定理の条件を満たすとき、γ は $\gamma \in (1, 2)$ を満たす、すなわち、整数ではないということがわかる。

定理 3.1 では $(p+1)/2 < q < p$ の場合を考えているが、もし q がちょうど $(p+1)/2$ であるならば、$\gamma = 2$ となることがわかる。このとき、以下の定理が成立する。

定理 3.2 (K. Takimoto, Y. Zhang [8], 2023). $f(t) = t^p + \varphi(t)$ とし、定理 3.1 において (A1), (A4) と以下の仮定 (A2)', (A3)' を満たすとする。

(A2)' 定数 $\alpha \in \mathbb{R}$ が存在して、$\varphi(t) = \alpha t^q + O(1)\, t^{\widetilde{q}},\ \varphi'(t) = \alpha q t^q + O(1)\, t^{\widetilde{q}-1},\ \varphi''(t) = \alpha q(q-1)\, t^{q-2} + O(1)\, t^{\widetilde{q}-2}\ \ (t \to \infty)$ が成立する。

(A3)' $M' > 0$ が存在して、任意の $\theta \in (1/2, 2)$ と大きい $t > 0$ に対して、

$$\frac{|f'''(\theta t)|\, t^3}{f(t)} \leq M'.$$

このとき、(1) のすべての large solution は

$$u(x) = \Phi(\delta(x)) \left[1 + A_1(x)\, \delta(x) + A_2(x)\, \delta^2(x) + O(1)\, \delta^{\mu_2}(x)\right] \quad (\delta(x) \to 0) \tag{9}$$

を満たす。ただし、$\mu_2 = \min\{2(p-\widetilde{q})/(p-1)+1, 3\}$, $A_1(x) = (n-1)H(x)/(p+3)$ であり、$A_2(x)$ は $n,\ p,\ q,\ \alpha,\ H(x)$ に依存する関数である。

特に、$\varphi(t)$ がちょうど αt^q であるならば、境界付近における large solution の漸近挙動の高次項を得ることができる。

定理 3.3 (K. Takimoto, Y. Zhang [9], 2024). $p>1$ とする。$m \in \mathbb{N},\ m \geq 3$ とする。

(1) $q \in (\max\{(p-3)/2,\ (3-m)(p-1)/2+1\}, (4-m)(p-1)/2+1)$ のとき、$\Delta u = u^p + \alpha u^q$ in D のすべての large solution は

$$u(x) = \Phi(\delta(x))\left[1+\sum_{k=1}^{m-1} A_k(x)\delta^k(x) + A_\gamma(x)\delta^\gamma(x) + O(1)\delta^\sigma(x)\right] \quad (\delta(x)\to 0) \quad (10)$$

を満たす。ただし、$\gamma = 2(p-q)/(p-1)+1$ であり, $A_1(x),\ A_2(x), \ldots, A_{m-1}(x)$ と $A_\gamma(x)$ は $n,\ p,\ q,\ \alpha,\ H(x)$ に依存する関数である。また、σ は $\sigma \in (\gamma, m), \sigma < 2(p+1)/(p-1)$ を満たす任意の定数である。

(2) $1 < p < (m+2)/(m-2),\ q = (3-m)(p-1)/2+1$ のとき、$\Delta u = u^p + \alpha u^q$ in D のすべての large solution は

$$u(x) = \Phi(\delta(x))\left[1+\sum_{k=1}^{m} A_k(x)\delta^k(x) + O(1)\delta^\sigma(x)\right] \quad (\delta(x)\to 0) \quad (11)$$

を満たす。ただし、$A_1(x),\ A_2(x), \ldots, A_m(x)$ は $n,\ p,\ q,\ H(x)$ に依存する関数であり、σ は $\sigma \in (m, m+1], \sigma < 2(p+1)/(p-1)$ を満たす任意の定数である。

上記の結果は第 2 節の定理 2.2 の拡張である。一方、定理 2.3、すなわち指数関数型の非線形項に対しては、以下の定理が成立する。

定理 3.4 (Y. Zhang [10], in preparation). $f(t)$ が以下の仮定 (B1)-(B4) を満たすとする。

(B1) $f(t) \geq 0,\ F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(s)\,ds < \infty$ であり、十分大きい t に対して、$f'(t) > 0$ が成り立つ.

(B2)
$$\frac{F(t)f'(t)}{(f(t))^2} = 1 + O(1)t^{-2} \quad \text{as } t\to\infty.$$

(B3) $C>0, C_1 \in \mathbb{R}$ が存在して、

$$\frac{F(t)}{f(t)} = C + C_1 t^{-1} + O(1)t^{-2} \quad \text{as } t \to \infty$$

が成り立つ。

(B4) $m>2,\ \varepsilon>0,\ M_0>0,\ t_0>0$ が存在して、$t>t_0$ に対して、

$$\frac{|f''(t+\sigma)|}{f(t)} \leq M_0(F(t))^{\frac{1}{m}}, \quad -\varepsilon<\sigma<\varepsilon$$

が成り立つ。

このとき、(1) のすべての large solution は

$$u(x)=\Phi(\delta(x))+A_1(x)\delta(x)+A_2(x)\delta(x)(\Phi(\delta(x)))^{-1}+O(1)\delta(x)(\Phi(\delta(x)))^{\gamma}\quad \text{as } \delta(x)\to 0 \tag{12}$$

を満たす。ただし、$\gamma\in[-2,-1)$ は任意の定数であり、$A_1(x)=C(n-1)H(x), A_2(x)=C_1(n-1)H(x)$ である。

この定理は、$f(t)=e^{\frac{1}{C}t}P(t)$ ($P(t)$ が正の多項式関数である) のような非線形項の場合において、その large solution の境界付近における漸近挙動の第三項が $A_2(x)\delta(x)(\Phi(\delta(x)))^{-1}$ で与えられることを示す。

ただし、非線形項がちょうど e^t である場合 (すなわち、前述の例において $C=1, P(t)\equiv 1$ である場合)、$C_1=0$ であるので、$A_2(x)\equiv 0$ となる。このとき、第三項 (言い換えれば、係数がゼロではない最初の項) は定理 3.4 で記述された形式とは異なるものとなる。

定理 3.5 (Y. Zhang [10], in preparation). $\Delta u=e^u$ in D のすべての large solution は

$$u(x)=\Phi(\delta(x))+A_1(x)\delta(x)+A_2(x)\delta^2(x)(\Phi(\delta(x)))+O(1)\delta^2(x)(\Phi(\delta(x)))^{\gamma}\quad \text{as } \delta(x)\to 0 \tag{13}$$

を満たす。ただし、$\gamma\in(0,1)$ は任意の定数であり、$A_1(x)=(n-1)H(x),\ A_2(x)=\nabla A_1(x)\cdot\nabla\delta(x)-A_1^2(x)$ である。

参考文献

[1] J.B.Keller, Electrohydrodynamics I. The equilibrium of a charged gas in a container. J. Rational Mech. Anal., 1956, **5**: 715–724.

[2] C. Loewner, L. Nirenberg, Partial differential equations invariant under conformal or projective transformations, in: Contributions to Analysis (a Collection of Papers Dedicated to Lipman Bers), Academic Press, New York, 1974, pp. 245–272.

[3] H. Rademacher, Einige besondere Probleme partieller Differentialgleichungen, Die Differential- und Integralgleichungender Mechanik und Physik, I, second edition, Rosenberg, New York, 1943, pp. 838–845.

[4] J.B. Keller, On solutions of $\Delta u=f(u)$, Commun. Pure Appl. Math. 10 (1957) 503–510.

[5] R. Osserman, On the inequality $\Delta u\geq f(u)$, Pac. J. Math. 7 (1957) 1641–1647.

[6] C. Anedda, G. Porru, Second order estimates for boundary blow-up solutions of elliptic equations, in: Dynamical Systems and Differential Equations. Proceedings of the 6th AIMS International Conference, Discrete Contin. Dyn. Syst. (suppl.) (2007) 54–63.

[7] C. Anedda, G. Porru, Estimates for boundary blow-up solutions of semilinear elliptic equations, Int. Journal of Math. Analysis, Vol. 2, 2008, no. 5, 213–234.

[8] K. Takimoto, Y. Zhang, Higher order estimate near the boundary of a large solution to semilinear Poisson equation with double-power like nonlinearity. J. Math. Anal. Appl., 2023, **527**: Art 127382.

[9] K. Takimoto, Y. Zhang, Asymptotic behavior near the boundary of a large solution to semilinear Poisson equation with double-power nonlinearity. Acta Mathematica Scientia, 2024, **44B**(6): 2083–2098.

[10] Y. Zhang, Third order boundary estimates for large solutions to semilinear Poisson equations with exponential nonlinearities, in preparation.